



## LØSNINGSFORSLAG FOR

ST1101 SANNSYNLIGHETSREGNING /  
ST6200 SANNSYNLIGHETSREGNING

Torsdag 6. desember 2007

**Oppgave 1**

a)  $P(a \text{ fra mor}) = P(a \text{ fra far}) = \frac{1}{2}$  og  $P(A \text{ fra mor}) = P(A \text{ fra far}) = \frac{1}{2}$ .

$$P(\text{barn blir } aa) = P(a \text{ fra mor}) \times P(a \text{ fra far}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{barn blir frisk bærer}) = P(a \text{ fra mor}) \times P(A \text{ fra far}) + P(A \text{ fra mor}) \times P(a \text{ fra far}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

b)  $P(\text{Mor} = Aa \text{ og Far} = Aa) = P(Aa) \times P(Aa) = 0,05 \times 0,05 = \underline{0,0025}$

$$P(\text{Nøyaktig en } Aa) = P(\text{Mor} = Aa \text{ og Far} = AA) + P(\text{Mor} = AA \text{ og Far} = Aa) = 2 \times 0,05 \times 0,95 = \underline{0,095}$$

$$P(\text{Barn} = aa) = P(\text{Mor} = Aa \text{ og Far} = Aa) \times P(\text{Barn } aa \mid \text{Mor} = Aa \text{ og Far} = Aa) = 0,0025 \times \frac{1}{4} = \underline{0,000625} \text{ (dvs. 1 av 1600).}$$

c)  $P(\text{Mor og Far} = AA \mid \text{Tre friske barn, dvs. } AA \text{ eller } Aa)$ .

Bruker Bayes formel 
$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j) \times P(A_j)}{\sum_i P(B \mid A_i) \times P(A_i)}$$

La  $B = \text{”Tre friske barn, dvs. } AA \text{ eller } Aa\text{”}$ ,  $A_1 = \text{”Mor og Far } AA\text{”}$ ,  $A_2 = \text{”Nøyaktig en } Aa\text{”}$ ,  $A_3 = \text{”Mor og Far } Aa\text{”}$ .

$$P(B \mid A_1) = 1, P(A_1) = 0,95^2, P(B \mid A_2) = 1, P(A_2) = 0,095,$$

$$P(B \mid A_3) = (1 - 1/4)^3, P(A_3) = 0,0025.$$

$$P(A_1 | B) = \frac{P(B | A_1) \times P(A_1)}{\sum_i P(B | A_i) \times P(A_i)} = \frac{1 \times 0,9025}{1 \times 0,95^2 + 1 \times 0,095 + 0,75^3 \times 0,0025} = \underline{\underline{0,9038}}$$

## Oppgave 2

La  $X$  være antall komponenter som svikter;  $X \sim \text{Bin}(n, p)$

a)  $P(\text{systemsvikt i serie}) = P(\text{minst en komponent svikter}) = P(X \geq 1)$

$$= 1 - P(X = 0) = \underline{\underline{1 - (1 - p)^n}}$$

$$P(\text{systemsvikt i parallell}) = P(\text{Alle komponentene svikter}) = P(X = n) = p^n$$

b)  $P(\text{systemsvikt i } m\text{-av-}n \text{ system}) = P(X > m) = \sum_{k=m+1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$n = 400$ ,  $p = 0,07$  og  $m = 40$ . Bruker normaltilnærmingen.

$$P(X > m) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx P\left(Z > \frac{40 - 28}{\sqrt{28(1-0,07)}} = 2,35\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2,35) = 1 - 0,9906 = \underline{\underline{0,0094}}$$

## Oppgave 3

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k}, & t > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a)  $F_T(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f_T(t) dt = \dots$  substitute  $y = t / \lambda$

$$\Rightarrow F_T(t) = k \int y^{k-1} e^{-y^k} dy = 1 - e^{-y^k} = \underline{\underline{1 - e^{-(t/\lambda)^k}}}$$
 for  $t > 0$

$$k = 1 \Rightarrow f_T(t) = \frac{1}{\lambda} e^{-t/\lambda} \text{ for } t > 0,$$

dvs. eksponensialfordelingen med parameter  $1 / \lambda$ .

b) La

$$f(t|T > t_0) = \begin{cases} c \times f(t), & t > t_0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor  $c$  er en normaliseringskonstant,

$$c = \frac{1}{\int_{t_0}^{\infty} f_T(t) dt} = \frac{1}{P(t > t_0)} = \frac{1}{1 - P(t \leq t_0)} = \frac{1}{1 - F_T(t)}$$

$$\Rightarrow f(t|T > t_0) = \begin{cases} \frac{f(t)}{1 - F_T(t)}, & t > t_0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{k \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1}}{\lambda \left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} \text{ for } t > 0$$

c)  $X = k^{-1}T^k$ . Transformasjonen er strengt monoton for positiv  $k$ .

$$X = g(T) = k^{-1}T^k \text{ og } T = h(X) = (kX)^{1/k} \Rightarrow h'(X) = (kX)^{\frac{1-k}{k}}$$

$$f_X(x) = f_T(h(x)) \times |h'(x)| = \frac{k}{\lambda^k} e^{-\frac{k}{\lambda^k}x}$$

dvs. eksponensialfordeling med parameter  $\frac{k}{\lambda^k}$ .